Topologia
Lista dodatkowa 1

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Podzbiór $A \subset X$ nazywamy *zbiorem otwartym* w przestrzeni (X,d), jeśli
$$\forall_{x\in A}\ \exists_{r>0}\quad B(x,r) \subset A.$$

Zad 1. Sprawdzić które z podanych podzbiorów płaszczyzny euklidesowej, tj. pary $(\mathbb{R}^2, d)$, gdzie d jest metryką euklidesową, są otwarte:

$$A = \{(x,y) : a < x < b\}; \qquad B = \{p\}, \qquad C = \{tp + (t-1)q : t \in (0,1)\}; p,q \in \mathbb{R}^2,$$

$$D = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{Q}\}, \qquad E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n, \text{ gdzie } E_n = \{(x,y) : n < x^2 + y^2 < n+1\}.$$

Zad 2. Niech (X,d) będzie dowolną przestrzenią metryczną i niech τ będzie rodziną wszystkich zbiorów otwartych w przestrzeni (X,d). Pokazać, że τ jest topologią, czyli że

(O1) $\emptyset \in \tau$ i $X \in \tau$,

(O2) jeśli $\gamma \subset \tau$, to $\bigcup_{U\in\gamma} U \in \tau$,

(O3) jeśli $U_1, ..., U_n \in \tau$, to $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.

Zad 3. Pokazać na przykładzie, że iloczyn nieskończonej ilości zbiorów otwartych nie musi być zbiorem otwartym.

Zad 4. Czy topologię można zadać na dowolnym zbiorze?

Zad 5. Opisać topologię wyznaczoną przez metrykę dyskretną.

Zad 6. Które z podanych rodzin stanowią topologię na zbiorze $X = \{a,b,c\}$:
a) $\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$,
b) $\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},X\}$,
c) $\{\emptyset,\{a\},\{b\},X\}$,
d) $\{\emptyset,\{a,b\},\{b,c\},X\}$.

Zad 7. Sprawdzić, że jeżeli (X,τ) jest przestrzenią topologiczną i $A \subset X$, to para (A,τ_A), gdzie
$$\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$$
jest przestrzenią topologiczną.

Zad 8. Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem, gdzie X jest zbiorem a (Y,τ) przestrzenią topologiczną. Czy rodzina
$$\tau_f = \{f^{-1}(U) : U \in \tau\}$$
jest topologią na X?

Zad 9. Pokazać, że w każdej przestrzeni topologicznej metryzowalnej, to jest takiej w której topologia pochodzi od metryki,

a) zbiór jednoelementowy jest domknięty,

b) spełniony jest warunek Hausdorffa.

Zad 10. Podać przykład przestrzeni topologicznej niemetryzowalnej.